Dipartimento di Scienze Statistiche

Analisi Matematica

Lezione 23, 18 novembre 2014

Forme indeterminate

prof. Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

Forme indeterminate. Teoremi di de l'Hôpital

Teorema (Johannes Bernoulli 1691-1692, de l'Hôpital 1696)

Siano f, $g : N \to \mathbb{R}$ continue e derivabili in

$$N =]a - r, a[\cup]a, a + r[$$

e tali che $f(a) = g(a) = 0$.

Forme indeterminate. Teoremi di de l'Hôpital

Teorema (Johannes Bernoulli 1691-1692, de l'Hôpital 1696)

Siano $f, g : N \to \mathbb{R}$ continue e derivabili in

$$N =]a - r, a[\cup]a, a + r[$$

e tali che $f(a) = g(a) = 0$. Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

Forme indeterminate. Teoremi di de l'Hôpital

Teorema (Johannes Bernoulli 1691-1692, de l'Hôpital 1696)

Siano $f, g : N \to \mathbb{R}$ continue e derivabili in

$$N =]a - r, a[\cup]a, a + r[$$

e tali che $f(a) = g(a) = 0$. Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

allora

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Dimostrazione

Prendiamo un punto $b \in N$ tale che $b > a$. Per il teorema di Cauchy-Darboux esiste un elemento $\bar{x} \in]a, b[$ tale che:

$$\frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$$

Dimostrazione

Prendiamo un punto $b \in N$ tale che $b > a$. Per il teorema di Cauchy-Darboux esiste un elemento $\bar{x} \in]a, b[$ tale che:

$$\frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$$

Quando passiamo al limite per $b \to a^+$ essendo $a < \bar{x} < b$ si ha che è anche $\bar{x} \to a^+$. D'altra parte per ipotesi abbiamo che il limite $\lim\limits_{\bar{x} \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste e vale ℓ. Ne segue che esiste anche il limite $\lim\limits_{b \to a^+} \dfrac{f(b)}{g(b)}$

Dimostrazione

Prendiamo un punto $b \in N$ tale che $b > a$. Per il teorema di Cauchy-Darboux esiste un elemento $\bar{x} \in]a, b[$ tale che:

$$\frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$$

Quando passiamo al limite per $b \to a^+$ essendo $a < \bar{x} < b$ si ha che è anche $\bar{x} \to a^+$. D'altra parte per ipotesi abbiamo che il limite $\lim\limits_{\bar{x} \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste e vale ℓ. Ne segue che esiste anche il limite $\lim\limits_{b \to a^+} \dfrac{f(b)}{g(b)}$ Analogamente si dimostra che anche il limite sinistro $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(b)}{g(b)}$ esiste e vale ℓ provando il teorema.

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - 1}$$

Osservazione

Il teorema di de l'Hospital dà soltanto delle condizioni sufficienti per l'esistenza del limite del quoziente f/g. Può accadere che le ipotesi del teorema di de l'Hopital non siano verificate esistendo ugualmente $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Osservazione

Il teorema di de l'Hospital dà soltanto delle condizioni sufficienti per l'esistenza del limite del quoziente f/g. Può accadere che le ipotesi del teorema di de l'Hopital non siano verificate esistendo ugualmente $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$$

In modo analogo si dimostrano versioni del teorema di de l'Hôpital nelle seguenti situazioni:

- **per** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ **oppure** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
- **per** f, g **definite su intervalli illimitati si possono considerare i limiti per** $x \to -\infty$ **e per** $x \to +\infty$

Convessità

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice:

- **convessa se per ogni x_1, $x_2 \in I$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:**

$$f\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

Convessità

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice:

- convessa se per ogni $x_1,\ x_2 \in I$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

- strettamente convessa se per ogni $x_1,\ x_2 \in I\ x_1 \neq x_2$ ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:

$$f\left((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\right) < (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2).$$

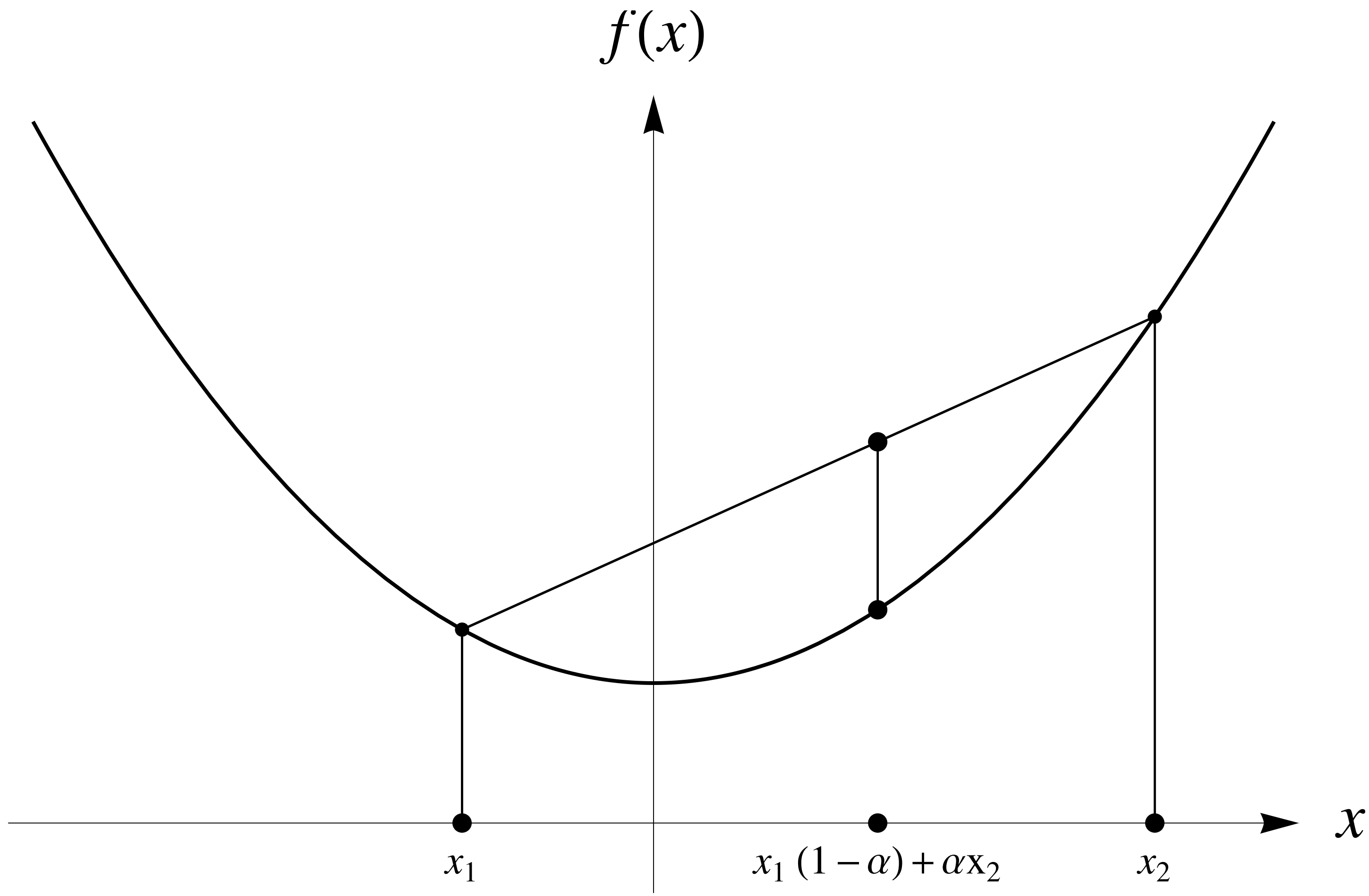


Figure 1: convessità

Concavità

Le funzioni concave *ribaltano* **la proprietà, il loro grafico giace al di sopra della corda. Definire le funzioni concave è dunque assai semplice, una funzione $f(x)$ è concava se e solo se $-f(x)$ è convessa.**

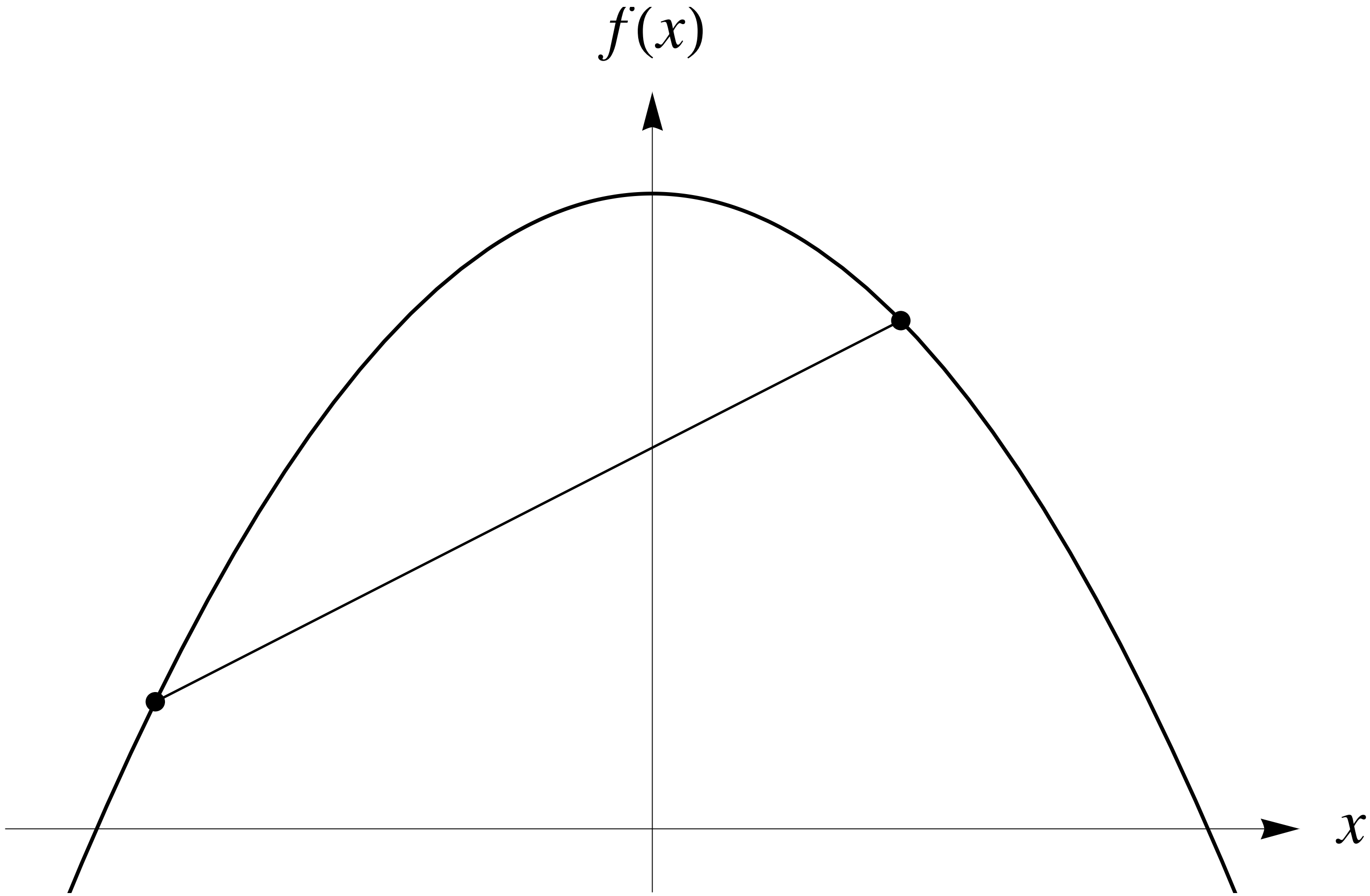


Figure 2: concavità

Teorema

La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con derivate prima e seconda continue è strettamente convessa se e solo se risulta $f^{(2)}(x) > 0$ per ogni $x \in I$.

Definizione

Diremo f ha un punto di flesso in x_0 se esiste un intorno completo $I(x_0)$ di x_0 tale per cui:

- **f è strettamente convessa se $x < x_0$ e strettamente concava se $x > x_0$,**
- **f è strettamente concava se $x < x_0$ e strettamente convessa se $x > x_0$.**

Esempio

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Esempio

$$f(x) = e^{-x^2} \implies f^{(2)}(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$$

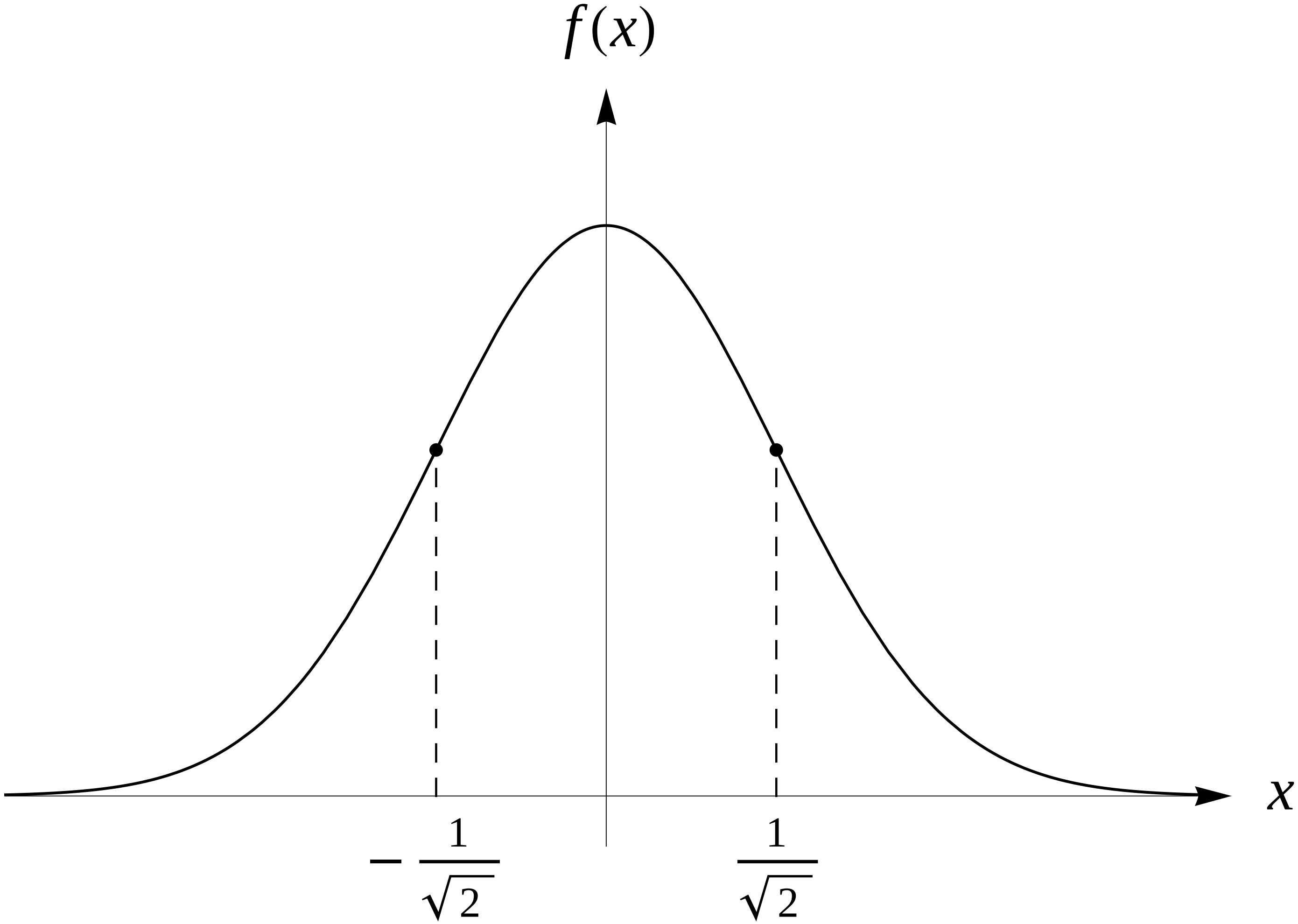


Figure 3: **Gaussiana**

Definizione

Se $x_1, \dots, x_n$ sono n numeri strettamente positivi diremo:

- **media aritmetica di $x_1, \dots, x_n$:**

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- **media geometrica di $x_1, \dots, x_n$:**

$$G(x_1, \dots, x_n) = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i \right]^{\frac{1}{n}}$$

- **media armonica di** $x_1, \ldots, x_n$ **:**

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right]^{-1}.$$

Teorema

$$\boldsymbol{H(x_1,\ldots,x_n) \leq G(x_1,\ldots,x_n) \leq A(x_1,\ldots,x_n)}$$

Teorema

$$\boldsymbol{H(x_1,\dots,x_n) \le G(x_1,\dots,x_n) \le A(x_1,\dots,x_n)}$$

Dimostrazione. **Poniamo** $z_i = \ln x_i$ **dalla convessità di** e^x **segue che:**

$$G(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{z_i}{n}} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{n}\right)$$

Teorema

$$H(x_1, \ldots, x_n) \leq G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n)$$

Dimostrazione. Poniamo $z_i = \ln x_i$ dalla convessità di e^x segue che:

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{z_i}{n}} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{n}\right)$$

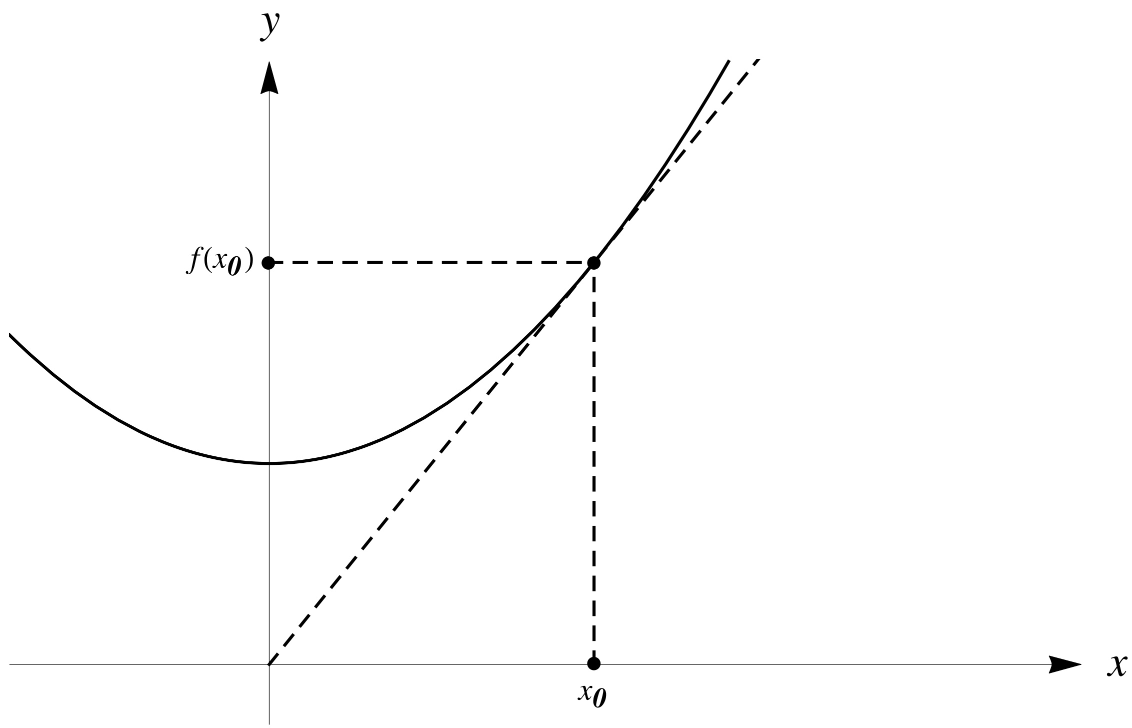
$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp z_i = A(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\boldsymbol{H(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)} \le \frac{1}{G\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)}}$$

$$
\boldsymbol{H(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)} \le \frac{1}{G\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)}}
$$

$$
\boldsymbol{= G(x_1,\ldots,x_n)}
$$

Consideriamo una funzione convessa che sia derivabile in tutti punti interni all'intervallo I in cui essa è definita e da un punto $x_0 \in I$ tracciamo la retta tangente al grafico di f



Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f **è strettamente convessa;**
- $f(x_2) > f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f'(x_1)$ **per ogni** $x_1, x_2 \in I$.

Teorema

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è strettamente convessa;
- $f(x_2) > f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f'(x_1)$ per ogni $x_1,\, x_2 \in I$.

Corollario

Sia f strettamente convessa e derivabile. Se $x \in I$ un punto critico, allora:

$$f(x) = \min_{y \in I} f(y).$$

Analisi asintotica

Simboli di Bachmann-Landau

Definizione

Le funzioni f e g sono equivalenti per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

In tal caso scriveremo $f \sim g$ per $x \to x_0$

Ad esempio

- $x^2 + x \sim x$ per $x \to 0$
- $x^2 + x \sim x^2$ per $x \to +\infty$
- $\sin x \sim x$ per $x \to 0$
- $\ln x \sim x - 1$ per $x \to 1$
- $\ln(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$
- $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$ per $x \to 0$

Definizione

Le funzioni f e g hanno lo stesso ordine di grandezza per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In tal caso scriveremo $f \asymp g$ per $x \to x_0$.

Definizione

Le funzioni f e g hanno lo stesso ordine di grandezza per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In tal caso scriveremo $f \asymp g$ per $x \to x_0$.

Si usa anche la notazione $f = \mathrm{O}(g)$

Definizione

Le funzioni f e g hanno lo stesso ordine di grandezza per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

In tal caso scriveremo $f \asymp g$ per $x \to x_0$.

Si usa anche la notazione $f = \mathrm{O}(g)$

Ad esempio

- $1 - \cos x \asymp x^2$ per $x \to 0$
- $\sqrt{1 + 2x^2} \asymp x$ per $x \to +\infty$
- $\sin 3x \asymp x$ per $x \to 0$
- $\ln x \asymp 3(x - 1)$ per $x \to 1$

Definizione

Diremo che f è o-piccolo di g per $x \to x_0$ e scriveremo $f = o(g)$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si dice anche che f è trascurabile rispetto a g per $x \to x_0$

Definizione

Diremo che f è o-piccolo di g per $x \to x_0$ e scriveremo $f = \mathrm{o}(g)$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si dice anche che f è trascurabile rispetto a g per $x \to x_0$

Osservazione

$f = \mathrm{o}(1)$ è equivalente a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ mentre $1 = \mathrm{o}(f)$ è equivalente a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Esempi

- $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$
- $x = o(x^2)$ per $x \to \infty$
- $1 - \cos x = o(x)$ per $x \to 0$
- $x - \sin x = o(x^2)$ per $x \to 0$

Osservazione

(a) $f = \mathrm{o}(g),\ g = \mathrm{o}(h) \implies f = \mathrm{o}(h)$

(b) $f_1 = \mathrm{o}(g_1),\ f_2 = \mathrm{o}(g_2) \implies f_1 f_2 = \mathrm{o}(g_1 g_2)$

(c) $f_1 \asymp g_1,\ f_2 = \mathrm{o}(g_2) \implies f_1 f_2 = \mathrm{o}(g_1 g_2)$

(d) $f \sim g \iff f - g = \mathrm{o}(g)$

Teorema

Se per $x \to x_0$ è $f_1 = o(f)$ e $g_1 = o(g)$ allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Teorema

Se per $x \to x_0$ è $f_1 = o(f)$ e $g_1 = o(g)$ allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-x^2}{3x+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1+x+x^2}{1-x-x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{-x^3} = 0$$

Teorema

Se per $x \to x_0$ è $f_1 \sim f$ e $g_1 \sim g$ allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x)g_1(x)$$

Inoltre se g e g_1 sono diverse da zero in un intorno di x_0 si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Teorema

Se per $x \to x_0$ è $f_1 \sim f$ e $g_1 \sim g$ allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)g_1(x)$$

Inoltre se g e g_1 sono diverse da zero in un intorno di x_0 si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$